**Занятие 3,4,5. «Степень и ее свойства»**

***1) Степень с целым показателем***

Пусть а — любое действительное число, п — любое натуральное число, тогда степенью числа а с натуральным показателем п (или п-й степенью числа а) называется число, записываемое как аn и определяемое по правилу

аn = $\left\{\begin{array}{c}aa…a, если n\geq 2;\\а, если n=1\end{array}\right.$

Пусть а — любое отличное от нуля действительное число, тогда нулевой степенью этого числа называется число единица, т.е. по определению а0 = 1 для любого отличного от нуля действительного числа а.

Нулевая степень числа нуль не определяется, и символ 00 считается лишенным смысла.

Пусть а — любое отличное от нуля действительное число, п — любое натуральное число, тогда степенью числа а с целым отрицательным показателем (-п) называется число $\frac{1}{a^{n}}$, т.е. по определению aп = $\frac{1}{a^{n}}$ для любого отличного от нуля действительного числа а и любого целого отрицательного числа (-п).

Целая отрицательная степень числа нуль не определяется, и символ 0-n считается лишенным смысла.

Итак, натуральная (n-я) степень определяется для любого действительного числа, а нулевая и целая отрицательная степени лишь для любого отличного от нуля действительного числа.

Если а — любое отличное от нуля действительное число, то можно дать определение степени с целым показателем, которое есть объединение предыдущих определений.

Пусть а — любое отличное от нуля действительное число, — любое целое число, тогда под числом аα понимают число, определяемое по правилу

aα =$\left\{\begin{array}{c}a, если α=1\\аа…а, если α=m, где m-натуральное число, m\geq 2;\\1, если α=0;\\\frac{1}{а^{α}}, если α=-n, где \left(-n\right)-целое отрицательное число \end{array}\right.$

при этом число а называется степенью с целым показателем, число а — основанием степени, число α — показателем степени.

Пусть а, b — любые, не равные нулю, действительные числа, α, β — любые целые числа, тогда:

А) (ab)α = aα⋅bα

Б)( $\frac{a}{b}$)α = $\frac{a^{α}}{b^{α}}$

В) aα⋅aβ = aα+β

Г) aα:aβ = aα-β

Д) (aβ)α = aαβ

*2) Степень с рациональным показателем*

Пусть n — натуральное число, п≥2, а — положительное число. Тогда положительное число b, такое, что bn = а называется арифметическим корнем п-й степени из числа а и обозначается b = $\sqrt[n]{а}$.

По определению $\sqrt[n]{а}$ справедливо следующее утверждение:

а — положительное число,

п — натуральное число,

$\sqrt[n]{а}$— положительное число,

($\sqrt[n]{а}$)n = а.

Пусть а — положительное число, r =$\frac{p}{q}$ - рациональное число, причем q — натуральное число (q ≥2). Положитель­ное число b такое, что b = $\sqrt[q]{a^{p}}$, называется r-й степенью числа а и обозначается b= ar, т.е. ap/q =$\sqrt[q]{a^{p}}$ .

Заметим, что $\sqrt[q]{a^{}}$ = a1/q. Пусть а и b — любые положитель­ные числа, r1 и r2 - любые рациональные числа, тогда справедливы следующие свойства, называемые свойствами степеней с рациональными показателями:



*3) Степень с иррациональным показателем*

Для степеней с иррациональным показателем справедливы следующие свойства. Пусть а >0, b > 0, α — иррациональное число, β — рациональное или иррациональное, тогда:



*4) Степень положительного числа*

Определение. Пусть дано положительное число а и действительное число α. Под числом аα понимают положительное число, определяемое по следующему правилу:

1. Если α > 0 и:
2. α = т, где т — натуральное число, то

aα = $\left\{\begin{array}{c}a, при m=1;\\aa…a, при m\geq 2.\end{array}\right.$

1. α = $\frac{1}{q}$ — натуральное число, *q≥2,* то аα =$\sqrt[q]{a}$ (арифметических корень q-й степени из положительного числа);
2. α =$\frac{p}{q}$, где р, q — натуральные числа, q≥2, то аα= $\sqrt[q]{a^{p}}$
3. а — иррациональное число, тогда:

а) если а> *1,то аα* — число большее, чем ar1 и меньшее, чем ar2, где r1 — любое рациональное приближение числа а с недостатком,r2 — любое рациональное приближение числа а с избыткам;

б) если 0<а< 1 *,то аα* — число меньшее, чем r1и большее, чем r2 (r1 и r2 — те же, что и выше);

в) если а =1, то аα =1.

1. Если а = 0, то аα = 1.
2. Если α <0, то aα =$\frac{1}{a^{\left|α\right|}}$

Число аα называется степенью, число а — основателем степени, число α — показателем степени.

Степень положительного числа обладает следующими основными свойствами: если а и b — положительные числа, α и β— любые действительные числа, то:

